Université de Bourgogne — Janvier 2017
L1 - Math11

EXAMEN - CORRIGÉ

I *(8 pts)*

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2+\exp(x)-1}}.$$

1. ***(2 pts)*** Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 en 0 de $g(x) = x^2 + \exp(x) - 1$. $g(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.
2. ***(2 pts)*** Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $h(x) = \ln(1+x^2)$. $h(x) = x^2 + o(x^3)$.
3. ***(2 pts)*** En déduire le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2. On a
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2+\exp(x)-1}\ln\left(1+x^2\right)\right)$$
. Or:
$$\frac{1}{x^2+\exp(x)-1}\ln\left(1+x^2\right) = \frac{x^2}{x+\frac{3}{2}x^2} + o\left(x^2\right) = \frac{x}{1+\frac{3}{2}x} + o\left(x^2\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$
Donc $f(x) = 1 + x - x^2 + o(x^2)$.
4. ***(2 pts)*** Déduire de ce développement l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 et la position du graphe de f par rapport cette tangente. $y = x+1$, et $\mathcal{C}_f$ situé en dessous de la tangente.

II *(8 pts)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

1. ***(2 pts)*** Calculer le développement limité asymptotique de f à l'ordre 2 en $+\infty$. On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= 1 - 2X^2\frac{1}{1+X^2} = 1 - 2X^2\left(1-X^2\right) + o\left(X^2\right) = 1 - 2X^2 + o\left(X^2\right) \\ &= 1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

2. ***(2 pts)*** En déduire l'équation de l'asymptote au graphe de f en $+\infty$ et la position de ce graphe par rapport à l'asymptote. $y = 1$, $\mathcal{C}_f$ situé sous l'asymptote.
3. ***(2 pts)*** Déterminer les primitives de f. On note g la primitive de f qui s'annule en 0. D'après l'écriture précédente :$F(x) = x - 2\arctan x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
4. ***(2 pts)*** Déterminer les primitives de g. Il s'agit de trouver les primitives de $\arctan x$. On intègre par parties. $u = \arctan x$, $v' = x$, $u' = \dfrac{1}{x^2+1}$, $v = x$. Donc

$$\begin{aligned}\int \arctan x \mathrm{d}x &= x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \text{ (on pose } w = x^2+1) \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|w| + C \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x\arctan x + \ln\left(1+x^2\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

III *(4 pts)*

Déterminer les primitives de $f : t \mapsto \cos^3 t$. Puisque $\cos^3 t = \cos t\left(1 - \sin^2 t\right)$, on pose $u = \sin t$ et $\mathrm{d}u = \cos t \mathrm{d}t$. On a donc :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$